Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A XII-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. Pentru un grup $(G,*)$ şi A,B submulţimi nevide ale lui G, notăm $A*B=\{a*b \mid a\in A \text{ şi } b\in B\}$.

a) Să se arate că dacă $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$, atunci grupul $(\mathbf{Z}_n,+)$ se poate scrie sub forma $\mathbf{Z}_n=A+B$, unde A şi B sunt două submulţimi nevide ale lui $\mathbf{Z}_n$ cu $A\neq\mathbf{Z}_n, B\neq\mathbf{Z}_n$ şi $|A\cap B|=1$.

b) Dacă $(G,*)$ este un grup finit şi A,B sunt două submulţimi nevide ale lui G cu $|A|+|B|>|G|$. atunci $G=A*B$.

(*Cu* $|M|$ *s-a notat numărul elementelor mulţimii* M)

Soluţie şi barem de corectare. a) Alegem $A=\{\hat{0},\hat{1}\}$ şi $B=\{\hat{1},\hat{2},\ldots,n\hat{-}1\}$. Cum $\hat{0}=\hat{1}+n\hat{-}1$ şi $B\subset A+B$, rezultă $\mathbf{Z}_n=A+B$ 2 puncte

b) Presupunem că $G\setminus(A*B)\neq\emptyset$ şi fie $a\in G\setminus(A*B)$. Definim $f:A\to G\setminus B$, $f(x)=x^{-1}*a$. . . . . 1 punct

Dacă $x^{-1}*a=b\in B$, atunci $a=x*b\in A*B$, ceea ce contrazice alegera lui a. Deci f e bine definită . . . . 1 punct

Cum $f(x)=f(y)$ implică $x^{-1}*a=y^{-1}*a$ deci $x=y$, rezultă că f este injectivă, adică $|A|\leq|G\setminus B|$ . . . . 2 puncte

Obţinem $|G|=|G\setminus B|+|B|\geq|A|+|B|$, contradicţie . . . . . 1 punct Prin urmare $G=A*B$. . . . . 1 punct

Subiectul 2. Se consideră funcţiile continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ şi $g:[0,1]\to(0,\infty)$. Să se arate că dacă f este crescătoare, atunci

$$\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\leq\int_0^t g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $t\in[0,1]$.

Soluţie şi barem de corectare. Fie $k=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x>0$. Prin considerarea funcţiei $g_1=\frac{1}{k}g$ putem presupune că $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1$.

Considerăm funcţia $F : (0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(t) = \frac{\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_0^t g(x)\mathrm{d}x}.$$

.... 2 puncte

Cum F este derivabilă pe $(0,1]$ şi

$$F'(t) = \frac{f(t)g(t)\int_0^t g(x)\mathrm{d}x - g(t)\int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\left(\int_0^t g(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$

$$= g(t)\frac{f(t)\int_0^t g(x)\mathrm{d}x - \int_0^t f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\left(\int_0^t g(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$

$$\geq g(t)\frac{\int_0^t (f(t)-f(x))g(x)\mathrm{d}x}{\left(\int_0^t g(x)\mathrm{d}x\right)^2} \geq 0,$$

rezultă că F este crescătoare. Inegalitatea $F(t) \leq F(1)$ revine la concluzia din enunţ .... 4 puncte

Pentru $t = 0$ inegaliatea este evidentă 1 punct

Subiectul 3. Determinaţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:

a) există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

b) $f(x) = \displaystyle\int_{x+1}^{x+2} f(t)\mathrm{d}t$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie şi barem de corectare. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi şirul $(a_n)_n$ definit astfel $a_0 = a$ şi prin inducţie, pentru a_n definit, alegem $a_{n+1} \in [a_n+1, a_n+2]$ astfel încât

$$\int_{a_n+1}^{a_n+2} f(x)\mathrm{d}x = f(a_{n+1}),$$

rezultat din teorema de medie .... 3 puncte

Rezultă $a_n \to \infty$ .... 1 punct

Cum $f(a_n) \to \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi $f(a_n) = f(a)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, rezultă că $f(a) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ .... 2 puncte

Prin urmare fc este constarntă şi reciproc, orice funcţie constantă verifică ipoteza din enunţ .... 1 punct

Subiectul 4. Fie k un corp cu 2^n elemente, $n \in \mathbf{N}^*$ şi polinomul $f = X^4 + X + 1$. Să se arate că:

a) dacă n este par, atunci f este reductibil în $k[X]$;

b) dacă n este impar, atunci f este ireductibil în $k[X]$.

Soluţie şi barem de corectare. Cum $|k| = 2^n$ rezultă $1 + 1 = 0$.

a) Deoarece $3|2^n - 1$ rezultă că există $\alpha \in k$ cu $\text{ord}(\alpha) = 3$ în grupul $(k^*, \cdot)$. Atunci $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ .... 1 punct

Rezultă $f = (X^2 + X + \alpha)(X^2 + X + \alpha + 1)$ .... 2 puncte

b) Presupunem că există $\beta \in k$ cu $f(\beta) = 0$. Avem $(\beta^2 + \beta)^2 + (\beta^2 + \beta) + 1 = 0$ deci $(\beta^2 + \beta)^3 = 1$ şi cum $2^n - 1$ nu e multiplu de 3, rezultă $\beta^2 + \beta + 1 = 0$, deci $\beta^3 = 1$ adică $\beta = 1$. Aceasta implică 3=0 deci 1=0, contradicţie. Deci f nu are rădăcini în k............................1 punct

Dacă f este reductibil, atunci $f = (X^2 + mX + n)(X^2 + pX + q)$ cu $m, n, p, q \in k$. Prein identificare obţinem $m+p = 0, n+q+mp = 0, mq+np = 1$ şi $nq = 1$. De aici $m = p, n + q = p^2, n + q = p^{-1}$ de unde $p^3 = 1$. Obţinem $p = 1, n = 1 + q$ deci $q^2 + q + 1 = 0$, fals...........................3 puncte